4.11.19
רענן שכטר
054 5331043

# לינארית - תירגול

## מערכת משוואות ממעלה ראשונה

### I משוואה

$$ax=b$$

אם $a\neq 0$ אז יש פתרון יחיד $x=\frac{b}{a}$.

לדוגמא: $5x=6$ אז $x=\frac{6}{5}$.

אם $a=0$: • אם $b=0$ אז יש אינסוף פתרונות. $0\cdot x=0 \leftarrow x$ כל מספר.

• אם $b\neq 0$ אז אין פתרון. $0\cdot x=1 \leftarrow 0=1$

סתירה, אין פתרון.

### II 2 משוואות עם 2 נעלמים

20) מהדף ①

$$\begin{cases}3x-2y=-13 & /\cdot 7\\ 7x-6y=-37 & /\cdot 3\end{cases}$$

$$-\begin{cases}21x-14y=-91\\ 21x-18y=-111\end{cases}$$

$4y=20 \longrightarrow 3x-2\cdot 5=-13$

$y=5$ $\quad 3x=-3$

$x=-1$

או

$$\left(\begin{array}{cc|c}3 & -2 & -13\\ 7 & -6 & -37\end{array}\right) \underset{3R_2-7R_1\to R_2}{=} \left(\begin{array}{cc|c}3 & -2 & -13\\ 0 & -4 & -20\end{array}\right) \underset{\frac{R_2}{-4}\to R_2}{=} \left(\begin{array}{cc|c}3 & -2 & -13\\ 0 & 1 & 5\end{array}\right) \underset{R_1+2R_2\to 1}{=}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}3 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 5\end{array}\right) \underset{\frac{R_1}{3}\to R_1}{=} \left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 5\end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}x=-1\\ y=5\end{array}}$$

42) מקרה ①

$$\left(\begin{array}{cc|c} 15 & 10 & 4 \\ 25 & 12 & 2 \end{array}\right) \underset{25R_1 - 15R_2 \to R_2}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 10 & 4 \\ 0 & 70 & 70 \end{array}\right) \underset{\frac{R_2}{70} \to R_2}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 10 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{R_1 - 10R_2 \to R_1}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{R_1}{15} \to R_1}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -0.4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

$x = -0.4$
$y = 1$

1) מקרה ②

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=5 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{R_2 - R_1 \to R_2}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & +3 \end{array}\right)$$

$0 \cdot x + 0 \cdot y = +3$

סתירה!

אין פתרון.

2)

$$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=4 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{R_2 - R_1 \to R_2}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{\frac{R_2}{2} \to R_2}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

$$\underset{R_1 + R_2 \to R_1}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

$x = 3$
$y = 1$

פתרון יחיד

3)

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 4x+2y=6 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{array}\right) \underset{R_2 - 2R_1 \to R_2}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

קיבלנו 2 נעלמים
~~משוואה~~ משוואה אחת,
ולכן יש אינסוף פתרונות.

כאשר יש יותר נעלמים
ממשוואות, יש אינסוף
פתרונות.

$2x+y=3$
$2x=-y+3$
$x=\frac{3-y}{2}$
$x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}y$

$y$ נקרא במקרה זה
משתנה חופשי.

$x$ נקרא במקרה זה
משתנה קשור.

תרגיל

$$\begin{cases} 2x+y=3 \\ 4x+2y=6 \\ x+y=5 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{R_1 \leftrightarrow R_3}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 - 4R_1 \to R_2 \\ R_3 - 2R_1 \to R_3}}{=}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & -14 \\ 0 & -1 & -7 \end{array}\right) \underset{\frac{R_2}{-2} \to R_2}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -7 \end{array}\right) \underset{\substack{R_3 + R_1 \to R_3 \\ R_1 - R_2 \to R_1}}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

פתרון יחיד.

4) $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 9 & -3 & 6 \end{array}\right) \underset{R_2-3R_1\to R_2}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\quad 3x-y=2,\quad x=\frac{y+2}{3}$ אינסוף פתרונות

5) $\left(\begin{array}{cc|c} 7 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 7 \end{array}\right) \underset{R_1\leftrightarrow R_2}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 7 & -1 & 9 \end{array}\right) \underset{R_2-7R_1\to R_2}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -8 & -40 \end{array}\right) \underset{\frac{R_2}{-8}\to R_2}{=}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{R_1-R_2\to R_1}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$ $\quad x=2,\ y=5 \qquad (2,5)$

6) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 5 \end{array}\right) \underset{R_2-4R_1\to R_2}{=} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ אין פתרון.

## III 3 משוואות עם 3 נעלמים

12) $\begin{cases} 2x+3y+z=6 & \text{II} \\ x-2y+4z=3 & \text{I} \\ 3x+4y-2z=5 & \text{III} \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y+4z=3 \quad /\cdot 2 & \text{I} \\ 2x+3y+z=6 & \text{II} \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{III} \end{array} \begin{cases} x-2y+4z=3 \quad /\cdot 3 \\ 3x+4y-2z=5 \end{cases}$

$-\begin{cases} 2x-4y+8z=6 \\ 2x+3y+z=6 \end{cases}$ $\qquad$ $-\begin{cases} 3x-6y+12z=9 \\ 3x+4y-2z=5 \end{cases}$

$-7y+7z=0$ $\qquad$ $-10y+14z=4$

$\begin{cases} -7y+7z=0 \\ -10y+14z=4 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \end{array}\right) \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & -2 & 5 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - 3R_1 \to R_3}}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 10 & -14 & -4 \end{array}\right) =$$

כשעובדים על עמודה 1 משתמשים בשורה 1

$$\underset{=}{\frac{R_2}{7} \to R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -14 & -4 \end{array}\right) \underset{R_3 - 10R_2 \to R_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \underset{\frac{R_3}{-4} \to R_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) =$$

כשעובדים על עמודה 2 משתמשים בשורה 2

$$\underset{=}{R_1 + 2R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 + R_1 \to R_2 \\ R_1 - 2R_3 \to R_1}}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x=1$
$y=1$
$z=1$

15) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & 8 \\ 2 & -4 & 3 & 3 \end{array}\right) \underset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 3 & -2 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 3 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2 - 3R_1 \to R_2 \\ R_3 - 2R_1 \to R_3}}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & -11 & 2 & -20 \\ 0 & -10 & 7 & -13 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{= \\ 11R_3 - 10R_2 \to R_3}}{11R_1 + 3R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & -16 & 28 \\ 0 & -11 & 2 & -20 \\ 0 & 0 & 57 & 57 \end{array}\right) \underset{\frac{R_3}{57} \to R_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & -16 & 28 \\ 0 & -11 & 2 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_1 + 16R_3 \to R_1 \\ R_2 - 2R_3 \to R_2}}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & 0 & 44 \\ 0 & -11 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{\frac{R_1}{11} \to R_1 \\ \frac{R_2}{-11} \to R_2}}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x=4$
$y=2$
$z=1$

ש.ב

מבל 2 - מסומן בצהוב ל- 11.11

(14, 11, 8, 5, 2)

19) $2x-3y=20$, $5x+6y=-4$

20) $3x-2y=-13$, $7x-6y=-37$

21) $-4x+3y=-11$, $8x+5y=11$

22) $3x+7y=-8$, $9x-4y=26$

23) $5x+2y=22$, $7x-8y=20$

24) $2x+3y=5$, $10x+5y=15$

25) $2x+3y=-1$, $5x-2y=7$

26) $3x+4y=-7$, $7x-3y=-4$

27) $5x-2y=3$, $7x-3y=3$

28) $4x+3y=1$, $9x+5y=-3$

29) $5x+2y=6$, $9x+5y=8$

30) $4x+7y=-10$, $3x-2y=7$

3...) $5x+4y=14$, $8x+5y=0$

32) $6x+7y=12$, $-5x+6y=-10$

33) $7x-5y=-5$, $-8x+6y=4$

3...) $7x-2y=-10$, $4x-9y=10$

35) $5x+3y=15$, $9x-8y=-40$

36) $4x-7y=1$, $9x-8y=10$

3...) $8x-4y=-16$, $9x+6y=3$

38) $7x+25y=11$, $11x+10y=-12$

39) $9x+17y=1$, $6x+13y=-1$

...) $11x+12y=7$, $15x+9y=12$

41) $10x+12y=16$, $25x-8y=21$

42) $15x+10y=4$, $25x+12y=2$

## ...שוואות מסודרות — שיטת ההצבה

...ערה: כתרגול נוסף אפשר לפתור את המשוואות הבאות גם בשיטת השוואת המקדמים.

...ור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת ההצבה:

...) $x+y=7$, $x-y=1$

44) $x+2y=5$, $x+y=3$

45) $x-3y=3$, $x+y=7$

...) $2x-y=7$, $x-y=5$

47) $x+y=4$, $3x+y=4$

48) $x-y=-1$, $2x-3y=-1$

...) $2x+3y=8$, $3x+y=5$

50) $2x+y=-3$, $3x-5y=2$

51) $4x+3y=2$, $4x-y=10$

...) $x-2y=9$, $2x+5y=0$

53) $5x-2y=-2$, $x+4y=4$

54) $x+3y=3$, $4x+5y=-9$

...) $3x-4y=10$, $x-5y=-15$

56) $7x+5y=-3$, $2x+y=-6$

57) $5x+6y=3$, $x+4y=-5$

58) $3x+2y=2$, $5x+2y=6$

59) $5x-4y=1$, $3x+4y=7$

60) $6x+5y=13$, $6x-4y=22$

61) $2x-3y=0$, $4x+5y=22$

62) $4x-3y=0$, $-5x+9y=21$

63) $10x+7y=5$, $5x+2y=-5$

64) $3x+2y=1$, $2x+3y=-1$

65) $5x-2y=2$, $-7x+3y=-1$

66) $4x+5y=-11$, $5x-3y=14$

67) $4x+3y=-10$, $3x+5y=-2$

68) $6x-7y=2$, $7x-8y=3$

69) $3x-8y=6$, $5x-7y=10$

## משוואות לא מסודרות

**הערה:** מערכות נוספות של משוואות מופיעות בעמ' 170.

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

70) $2x-5=x-y+3$, $x+y=2y-x+4$

71) $x-1+y=4-x$, $3x-2=y+8$

72) $2x-1=x-3y+2$, $x-3+y=2x-1-y$

73) $3x-7-2y=x+y-5$, $3y-3=2x-7y+9$

74) $y-x+8=x-3$, $x-2y=2-y$

75) $2y-2x+3=2x-3y$, $-y+x=-1-3x$

76) $3y-x+2=4x+2-3y$, $2x-3-y=5y-4x+3$

77) $4x-7x+5=3x+y-2$, $5x+6y-8=6x-1$

78) $4x-y+2=x-y-4$, $2x+2y-1=3x-5$

79) $4x-y=5x-3+y$, $2x-3y-x=x+5+y-1$

80) $y=x-3$, $y=2x+4$

81) $y=-x+5$, $y=3x-3$

82) $y=4x-3$, $y=-5x+6$

83) $y=3x-2$, $y=7x+2$

84) $x+3(y-1)=1-x$, $4(x-2)+5y=-6$

85) $x-2(y-2)=1+y$, $5(x-2)+2y=-8$

86) $x-3(y-1)=16-x$, $5(x-1)+2y=-1$

87) $3(x+1)+4y=-2$, $2x-5(y+1)=9-2x$

4.11.19

תרגילים - לינארית (מתירגול)

פתור את מערכות המשוואות הבאות: (לחלק מהמערכות יש פתרון יחיד)

1) $x+y=2$, $x+y=5$

2) $x-y=2$, $x+y=4$

3) $2x+y=3$, $4x+2y=6$

4) $3x-y=2$, $9x-3y=6$

5) $7x-y=9$, $x+y=7$

6) $x+2y=1$, $4x+8y=5$

7) $2(x-y)+4y=1+x$, $2-7y+x=3(x-y)$

8) $4(y-1)+x=y-3$, $x+6(y+1)=9-x$

**תשובות** (מערכות ללא פתרון ומערכות עם אינסוף פתרונות):

1) אין פתרון. 2) $(3,1)$. 3) אינסוף פתרונות. 4) אינסוף פתרונות. 5) $(2,5)$.
6) אין פתרון. 7) אינסוף פתרונות. 8) אין פתרון.

## מערכות של שלוש משוואות ממעלה ראשונה עם שלושה נעלמים

פתור את מערכות המשוואות הבאות:

1) $x+y-z=0$, $x-y-z=2$, $x-y+z=4$

2) $x+y-z=0$, $x-y+z=2$, $x+y+z=6$

3) $x+y-z=-2$, $2x+y+z=5$, $3x+y+z=4$

4) $2x+y-z=7$, $x-y-z=-3$, $x+2y+2z=6$

5) $x+y=5$, $x+z=7$, $y+z=8$

6) $x-y=-6$, $x+z=1$, $y-z=-3$

7) $x-y=1$, $x-z=-2$, $y+z=3$

8) $2x+y=3$, $x+y+z=0$, $y+3z=-1$

9) $x+y+z=-4$, $3x+2y=-3$, $5x+3y=-3$

10) $x+2y+3z=6$, $x-y+z=0$, $4y+5z=1$

11) $2x+y-3z=6$, $x+2y+z=12$, $3x-5z=0$

12) $2x+3y+z=6$, $x-2y+4z=3$, $3x+4y-2z=5$

13) $5x-3y-2z=-4$, $-2x+4y+3z=-3$, $x+2y+4z=2$

14) $2x+4y+3z=-5$, $3x+3y+2z=0$, $5x+y+3z=1$

15) $3x-2y-4z=4$, $x+3y-2z=8$, $2x-4y+3z=3$

**תשובות** (מערכות של שלוש משוואות ממעלה ראשונה עם שלושה נעלמים):

1) $(2,-1,1)$. 2) $(1,2,3)$. 3) $(-1,3,4)$. 4) $(0,5,-2)$. 5) $(2,3,5)$.
6) $(-4,2,5)$. 7) $(1,0,3)$. 8) $(5,-7,2)$. 9) $(3,-6,-1)$. 10) $(7,4,-3)$.
11) $(0,6,0)$. 12) $(1,1,1)$. 13) $(-2,-4,3)$. 14) $(2,0,-3)$. 15) $(4,2,1)$.

11.11.19

# לינארית - תירגול

## מערכת משוואות

מהדפים

8) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \underset{R_3-3R_1\to R_3}{\overset{R_2-2R_1\to R_2}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \underset{R_3-R_2\to R_3}{\overset{R_1-R_2\to R_1}{=}}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \overset{\frac{R_3}{-2}\to R_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{R_2-R_3\to R_2}{\overset{R_1-R_3\to R_1}{=}}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $\quad x=2,\ y=-1,\ z=2$    פתרון יחיד.

9) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & 3 & 9 \end{array}\right) \underset{R_3-4R_1\to R_3}{\overset{R_2-2R_1\to R_2}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & 7 \end{array}\right) \overset{\frac{R_2}{-1}\to R_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \end{array}\right)$

$\underset{R_3+R_2\to R_3}{\overset{R_1+R_2\to R_1}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

שורת אפסים, מתבטלת.

נשארנו עם 2 משוואות עם 3 נעלמים במטריצה מדורגת, ולכן יש אינסוף פתרונות.
המשתנים $x,y$ מתחילים שורה משמאל* ולכן הם משתנים קשורים.
המשתנה $z$ אינו מתחיל שורה משמאל ולכן הוא משתנה חופשי.

* משתנה מתחיל שורה משמאל הוא משתנה שהוא הראשון במשוואה משמאל שהמקדם שלו לא אפס, במטריצה מדורגת.

ולכן, בתרגיל זה יש אינסוף פתרונות, כאשר $x,y$ קשורים ו- $z$ חופשי.

$x+2t=11 \longrightarrow x=-2z+11$

$y+z=7 \longrightarrow y=-z+7$

10) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 5 & 11 \\ 5 & -6 & 7 & 17 \end{array}\right) \underset{R_3-5R_1\to R_3}{\overset{R_2-3R_1\to R_2}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{R_3-R_2\to R_3}{\overset{R_1-R_2\to R_1}{=}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{R_2}{-1}\to R_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אינסוף פתרונות

$x = z+1$
$y = 2z-2$

11) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 12 \end{array}\right) \underset{R_3-3R_1\to R_3}{\overset{R_2-2R_1\to R_2}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{R_3-R_2\to R_3}{\overset{R_1-R_2\to R_1}{=}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \overset{\frac{R_3}{-2}\to R_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{R_2-R_3\to R_2}{\overset{R_1-R_3\to R_1}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$x=1,\ y=1,\ z=1$ פתרון יחיד

18) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 3 & 12 \\ 6 & 15 & 15 & 34 \end{array}\right) \underset{R_3-6R_1\to R_3}{\overset{R_2-3R_1\to R_2}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -9 & -12 \\ 0 & -3 & -9 & 2 \end{array}\right) \overset{R_2+R_3\to R_3}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & -9 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{array}\right)$$

שורת סתירה

אין פיתרון.

* כאשר יש יותר נעלמים ממשוואות <u>לא</u> יהיה פתרון יחיד. יכול להיות אינסוף פתרונות או שלא יהיה פתרון.

2) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 17 & 23 & 29 & 35 \end{array}\right) \underset{R_3-11R_1\to R_3}{\overset{R_2-6R_1\to R_2}{=}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2\to R_3}{=}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{R_2}{-5}\to R_2}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{R_1-2R_2\to R_1}{=}$$

אינסוף פתרונות, $x_1, x_2$ קשורים, $x_3, x_4$ חופשיים.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

$x_1 = x_3+2x_4-3$
$x_2 = -2x_3-3x_4+4$

1)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 5 & 3 & 4 \end{array}\right) \underset{R_4-5R_1\to R_4}{\overset{R_2-R_1\to R_2,\ R_3-4R_1\to R_3}{=}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2\to R_3,\ R_4-R_2\to R_4}{=}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{R_2}{-2}\to R_2}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \overset{R_1-R_2\to R_1}{=}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

$x_1 = 2 - x_3$
$x_2 = -2 - x_4$

אינסוף פתרונות
~~[illegible]~~ חופשיים $x_3, x_4$
קשורים $x_1, x_2$

3)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 5 \\ 3 & -6 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & -14 & 5 & 16 & 13 \end{array}\right) \underset{R_3-3R_1\to R_3,\ R_4-7R_1\to R_4}{\overset{R_2-2R_1\to R_2}{=}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right) \overset{R_3-R_2\to R_3,\ R_4-2R_2\to R_4}{=}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \overset{\frac{R_2}{-1}\to R_2}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right) \overset{R_1-R_2\to R_1}{=}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$

$x_1 = 4 + 2x_2 - 3x_4$
$x_3 = -3 + x_4$

אינסוף פתרונות
קשורים $x_1, x_3$
חופשיים $x_2, x_4$

4)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & -15 \\ 9 & 6 & 9 & 3 & 15 \end{array}\right) \overset{R_1\leftrightarrow R_4}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 9 & 6 & 9 & 6 & 15 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & -15 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right) \overset{\frac{R_1}{3}\to R_1}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & -15 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 6 \end{array}\right) \underset{R_3-R_1\to R_3,\ R_4-2R_1\to R_4}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{=}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & -20 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right) \underset{R_4+R_1\to R_4}{\overset{R_3+5R_2\to R_3}{=}} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \overset{R_3\leftrightarrow R_4}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & 2 & \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{\frac{R_3}{-3}\to R_3}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \overset{R_4+6R_3\to R_4,\ R_2+R_3\to R_2,\ R_1-2R_3\to R_1}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \overset{R_1-3R_2\to R_1}{=} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

4) $$\left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 4 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & -15 \\ 9 & 6 & 9 & 3 & 15 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 6 & 4 & 5 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & -15 \\ 9 & 6 & 9 & 3 & 15 \end{array}\right) = \begin{matrix} R_2 - 2R_1 \to R_2 \\ R_3 - R_1 \to R_3 \\ R_4 - 3R_1 \to R_4 \end{matrix} =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -12 \end{array}\right) = \frac{R_2}{-3} \to R_2 \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 4 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -12 \end{array}\right) = \begin{matrix} R_1 - 4R_2 \to R_1 \\ R_3 + 6R_2 \to R_3 \\ R_4 + 3R_1 \to R_4 \end{matrix} =$$

אינסוף פתרונות.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right) = \frac{R_1}{3} \to R_1 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right)$$

$X_3 = 4$

$X_1 = -\frac{2}{3}X_2 - \frac{1}{3}X_4 - \frac{7}{3}$

* מערכת הומוגנית, כל האיברים החופשיים הם 0. תמיד יהיה לה לפחות פתרון אחד!

תרגיל

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right) = \begin{matrix} R_2 - 4R_1 \to R_2 \\ R_3 - 7R_1 \to R_3 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right) = \frac{R_2}{-3} \to R_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array}\right) = \begin{matrix} R_3 + 6R_2 \to R_3 \\ R_1 - 2R_2 \to R_1 \end{matrix}$$

אינסוף פתרונות

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$X_1 = X_4$

$X_2 = -2X_3$

11.11.19

1

# תרגיל ~~1~~ 2

1 ✓ הצג בצורה וקטורית את פתרון המערכת:

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & +y & +z & +w & =0 \\ x & -y & +z & -w & =4 \\ 4x & +2y & +4z & +2w & =4 \\ 5x & +3y & +5z & +3w & =4 \end{array}\right\}$$

✓ 2. הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 6x_1+7x_2+8x_3+9x_4=10 \\ 11x_1+17x_2+23x_3+29x_4=35 \end{cases}$$

✓ 3. הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+2x_4=1 \\ 2x_1-4x_2+x_3+5x_4=5 \\ 3x_1-6x_2+2x_3+7x_4=6 \\ 7x_1-14x_2+5x_3+16x_4=13 \end{cases}$$

✓ 4. הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 6x_1+4x_2+5x_3+2x_4=6 \\ 3x_1+2x_2+4x_3+x_4=9 \\ 3x_1+2x_2-2x_3+x_4=-15 \\ 9x_1+6x_2+9x_3+3x_4=15 \end{cases}$$

2

5. הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4-2x_5=7 \\ 2x_1+5x_2-6x_3+2x_4+7x_5=50 \\ -5x_1-4x_2+15x_3-5x_4+9x_5=-15 \end{cases}$$

6. הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=30 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=20 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=-2 \\ x_1+3x_2+x_3+3x_4=22 \end{cases}$$

7. הפתרון הכללי של מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=1 \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4=1 \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4=1 \end{cases}$$

8. הבט במערכת הבאה ופתור

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+2z=5 \\ 2x+3y+5z=11 \\ 3x+4y+5z=12 \end{array}\right\}$$

9. הבט במערכת הבאה :

$$\left\{\begin{array}{c} x-y+z=4 \\ 2x-3y+z=1 \\ 4x-5y+3z=9 \end{array}\right\}$$

3

10. הבט במערכת הבאה ופתר

$$\begin{Bmatrix} x-y+z=3 \\ 3x-4y+5z=11 \\ 5x-6y+7z=17 \end{Bmatrix}$$

11. הבט במערכת הבאה ופתור

$$\begin{Bmatrix} x+y+2z=4 \\ 2x+3y+5z=10 \\ 3x+4y+5z=12 \end{Bmatrix}$$

12. הבט במערכת הבאה ופתר :

$$\begin{Bmatrix} x-y+z=4 \\ 2x-3y+z=-1 \\ 4x-5y+3z=7 \end{Bmatrix}$$

13. הבט במערכת הבאה ופתר

$$\begin{Bmatrix} x-y+z=3 \\ 3x-4y+5z=10 \\ 5x-6y+7z=16 \end{Bmatrix}$$

4

14. הבט במערכת הבאה ופתור

$$\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ 3x+7y+12z=32 \\ 6x+14y+24z=64 \end{cases}$$

15. הבט במערכת הבאה ופתור

$$\begin{cases} x+2y+3z=9 \\ 3x+7y+12z=32 \\ 6x+14y+23z=63 \end{cases}$$

16. הבט במערכת הבאה ופתור

$$\begin{cases} x+2y+3z=15 \\ 3x+7y+12z=56 \\ 6x+14y+z=43 \end{cases}$$

17. הבט במערכת הבאה

$$\begin{cases} x+3y+4z=8 \\ 3x+6y+3z=12 \\ 6x+15y+15z=36 \end{cases}$$

5

18. הבט במערכת הבאה ופתור

$$\begin{cases} x+3y+4z=8 \\ 3x+6y+3z=12 \\ 6x+15y+15z=34 \end{cases}$$

תשובות

1. $t,s\in\Re \quad (-t+2,-s-2,t,s)$
2. $t,s\in\Re \quad (s+t-1,4-2s-3t,s,t)$
3. $t,s\in\Re \quad (2s-3t+4,s,t-3,t)$
4. $t,s\in\Re \quad (-\frac{2}{3}s-\frac{1}{3}t-\frac{7}{3},s,t,4)$
5. $t,s\in\Re \quad (-t-s+\frac{349}{67},\frac{256}{67},t,s,\frac{196}{67})$
6. $t\in\Re \quad (t-3,-t+6,-t+7,t)$
7. $t\in\Re \quad (-2t-1,t,0,-1)$
8. $(2,-1,2)$
9. $t\in\Re \quad (-2t+11,-t+7,t)$
10. $t\in\Re \quad (t+1,2t-2,t)$
11. $(1,1,1)$
12. $t\in\Re \quad (-2t+13,-t+2,t)$
13. $t\in\Re \quad (2t-1,t+2,t)$
14. $t\in\Re \quad (3t-1,-3t+5,t)$
15. $(2,2,1)$
16. $(2,2,3)$
17. $t\in\Re \quad (5t-4,-3t+4,t)$
18. אין פתרון

18.11.19

# לינארית - תירגול

## מערכת משוואות עם פרמטר

1) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \\ a & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 1 & a & 1 \\ a & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) = \begin{matrix} R_2-2R_1 \to R_2 \\ R_3-aR_1 \to R_3 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -3 & a-2 & 1-2a \\ 0 & 1-a & 2-a & 1-a^2 \end{array}\right) \xrightarrow{3R_3+(1-a)R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & -3 & a-2 & 1-2a \\ 0 & 0 & 3(\overset{2-a}{\cancel{\quad}})+(1-a)(a-2) & 3(1-a^2)+(1-a)(1-2a \end{array}\right)$$

הערה

אם הפותחים של 3 השורות בצורה מדורגת שונים מאפס יש פתרון יחיד.

אז אם זה מתקיים, יהיה פתרון יחיד:

$3(\overset{2-a}{\cancel{\quad}})+(1-a)(a-2)\neq 0$

$6-3a+a-2-a^2+2a\neq 0$

$-a^2+4\neq 0$

$a^2\neq 4$

$a\neq\pm 2$ פתרון יחיד.

נבדוק

$a=2$

$3(2-2)+(1-2)(2-2)=3(1-2^2)+(1-2)(1-2\cdot 2)$

$0=-6$

לכן, יוצאת שורת סתירה ואין פתרון.

$a=-2$

$0=3(1-(-2)^2)+(1-(-2))(1-(2(-2)))$

$0=6$

לכן, יוצא שורת סתירה ואין פתרון.

הערה

*אם שני האגפים היו מתאפסים אז היה אינסוף פתרונות.

לסיכום, $a\neq\pm 2$ פתרון יחיד.

$a=2$ או $a=-2$ אין פתרון.

לא קיים $a$ עבורו יש אינסוף פתרונות.

2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 2 & a & 4 & a \\ 3 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \underset{R_3-3R_1\to R_3}{\overset{R_2-2R_1\to R_2}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & 4-2a & a-2 \\ 0 & -2 & -2a & -2 \end{array}\right) = \cancel{(a-2)R_3+2R_2\to R_3}$

$R_2 \leftrightarrow \frac{R_3}{-2}$

* עדיף שלא יהיה פותח שתלוי ב-$a$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & a-2 & 4-2a & a-2 \end{array}\right) \overset{R_3-(a-2)R_2\to R_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (4-2a)-a(a-2) & 0 \end{array}\right)$

נבדוק מתי יש פתרון יחיד, כלומר

$(4-2a)-a(a-2) \neq 0$

$4-2a-a^2+2a \neq 0$

$-a^2+4 \neq 0$

$a \neq \pm 2$

נבדוק

$a=2$

$0=(4-2\cdot 2)-2(2-2)$

$0=0$

ולכן, כאשר $a=2$ יש אינסוף פתרונות

$a=-2$

$0=\overbrace{(4-2\cdot(-2))}^{8}\overbrace{-(-2)(-2-2)}^{-8}$

$0=0$

ולכן, כאשר $a=-2$ יש אינסוף פתרונות.

לסיכום

כאשר $a\neq\pm 2$ יש פתרון יחיד

כאשר $a=\pm 2$ יש אינסוף פתרונות

אין $a$ עבורו אין פתרון.

* יהיה תרגיל כזה (עם פרמטר) במבחן!

3) $\left(\begin{array}{ccc|c} b & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ b & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{R_3 - R_1 \to R_3}{\overset{R_2 - bR_1 \to R_2}{=}}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1-b^2 & 1-b & 4-3b \\ 0 & b & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 1-b^2 & 1-b & 4-3b \end{array}\right) =$

$\frac{R_2}{b} \to R_2$

$\cancel{(\frac{1}{b})R_3 - (1-b^2)R_2 \to R_3}$

$b=$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

* אם מציבים $b=0$ רואים שאין פתרון כאשר $b=0$

צריך לבדוק לפני הפעולה הבאות כי יש פה איפוס ב-"0" אפשרי (כשהפותחים הפרמטר).

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 1-b^2 & b(1-b)-0 & 4-3b \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - (1-b^2)R_2 \to R_3} =$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{b} \\ 0 & 0 & 1-b & 4-3b-\frac{1}{b}(1-b^2) \end{array}\right)$

לסיכום

$b \neq 0$ וגם $1-b \neq 0$ פתרון יחיד

$b \neq 0$ וגם $b \neq 1$ פתרון יחיד

כאשר $b=1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ אין פתרון

אין $b$ עבורו יש אינסוף פתרונות.

תרגיל

נתון

לאילו ערכי $K$ יש
פתרון יחיד
אינסוף פתרונות
ואין פתרונות

8) $\left(\begin{array}{ccc|c} K & 1 & 1 & K \\ 1 & K & 1 & K \\ 1 & 1 & K & K \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & K & 1 & K \\ K & 1 & 1 & K \\ 1 & 1 & K & K \end{array}\right) \underset{R_3 - R_1 \to R_3}{\overset{R_2 - KR_1 \to R_2}{=}}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & K & 1 & K \\ 0 & 1-K^2 & 1-K & K-K^2 \\ 0 & 1-K & K-1 & 0 \end{array}\right) =$

$K(1-K)$

$(1-K)(K+1)$

$(1-K)$

$(1+K)R_3 - R_2 \to R_3$

$(1-K)=0 \to K=1$

אינסוף

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & K & 1 & K \\ 0 & 1-K^2 & 1-K & K-K^2 \\ 0 & 0 & (K-1)(K+1) - (1-K) & -(K-K^2) \end{array}\right)$

$K=-2$

$K \neq -2$ פתרון יחיד.

$-(-2-4)=6$

$K=(-2)$ אין פתרון

$(K-1)(K+1) - (1-K) \neq 0$

$K^2 - 1 - 1 + K \neq 0$

$K^2 + K - 2 \neq 0$

$X_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -2 \\ +1 \end{cases}$

הדרך המלאה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k \\ k & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & k & k \end{array}\right) \begin{array}{l} R_2 - kR_1 \to R_2 \\ = R_3 - R_1 \to R_3 \end{array}$$

אינסוף פתרונות.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & k-k^2 \\ 0 & 1-k & k-1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k \\ 0 & \boxed{1-k} & k-1 & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & k-k^2 \end{array}\right) = \underset{k \neq 1}{\frac{R_2}{1-k} \to R_2}$$

$$\left(\frac{k-1}{1-k} = \frac{-1(1-k)}{1-k} = -1\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1-k^2 & 1-k & k-k^2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-(1-k^2)R_2 \to R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 1 & k \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k+1-k^2 & k-k^2 \end{array}\right)$$

הסברנו

הביטוי האלכסון, לכן נבדוק מתי הוא לא 0 כדי שיהיה איבר פותח.
הצבנו במטריצה וראינו שמקבלים כש $k=1$ יש אינסוף פתרונות.

ואז הנחנו שהוא לא שווה ל 1 כלומר $k\neq 1$ ויכולנו לחלק את השורה השנייה בו.

נבדוק

$k \neq 1$ וגם $1-k+1-k^2 \neq 0$ פתרון יחיד

$$-k^2-k+2 \neq 0$$

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$

$k \neq -2, 1$ פתרון יחיד.

$k=-2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$ אין פתרון.

~~$k \neq 1$~~ $k=1$ אינסוף פתרונות.

11) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 4 & a & 2 & a \\ a & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & 2 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{4R_3 - aR_1}{\overset{4R_2 - aR_1}{=}}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & 2 & a \\ 0 & 4-a^2 & 4-2a & 4-a^2 \\ 0 & 4-a^2 & 12-2a & 4-a^2 \end{array}\right) =$

$4-a^2 \neq 0$
$a^2 \neq 4$
$a \neq \pm 2$

$a=2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$ אינסוף פתרונות

$a=-2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \end{array}\right)$ אין סוף פתרונות

$\frac{2(2-a)}{(2-a)(2+a)}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & 2 & a \\ 0 & 1 & \frac{2}{2+a} & 1 \\ 0 & 4-a^2 & 12-2a & 4-a^2 \end{array}\right) \overset{R_3-(4-a^2)R_2}{=}$ $R_3 - R_2$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & 2 & a \\ 0 & 1 & \frac{2}{2+a} & 1 \\ 0 & 0 & (12-2a)-\left(\left(\frac{2}{2+a}\right)(4-a^2)\right) & 0 \end{array}\right)$

$(12-2a)-\left(\left(\frac{2}{2+a}\right)(4-a^2)\right) \neq 0$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & 2 & a \\ 0 & 4-a^2 & 4-2a & 4-a^2 \\ 0 & 0 & 12-2a-4+2a & 0 \end{array}\right) \overset{\frac{R_2}{4-a^2} \to R_2}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{2+a} & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$

דרך של המורה

$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & 2 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \underset{4R_3 - aR_1 \to R_3}{\overset{4R_2 - aR_1 \to R_2}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & 2 & a \\ 0 & 4-a^2 & 4-2a & 4-a^2 \\ 0 & 4-a^2 & 12-2a & 4-a^2 \end{array}\right) =$

$4-a^2 \neq 0$
$a^2 \neq \pm 2$
$a=2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$ אינסוף פתרונות

$a=-2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \end{array}\right)$ $R_3 - 2R_2 \to R_3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ אינסוף פתרונות

$a \neq \pm 2$
$R_3 - R_2 \to R_3$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & a & 2 & a \\ 0 & 4-a^2 & 4-2a & 4-a^2 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$ פתרון יחיד כאשר $a \neq \pm 2$

אינסוף כאשר $a=\pm 2$.

אם זה 0-ים
כי אמרנו ש
$a \neq \pm 2$

## לסיכום

$a \neq \pm 2$ פתרון יחיד

$a=2$ או $a=-2$ אינסוף פתרונות

אין a שעבורו אין פתרון

מ.ש.ל

## תרגיל ~~2~~ 3

1. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x+y+az=1 \\ x+2y+z=a \\ ax+y+2z=1 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

2. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+az=1 \\ 2x+ay+4z=a \\ 3x+y+az=1 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

3. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} bx+y+z=4 \\ x+by+z=3 \\ x+2by+z=4 \end{cases}$$

כאשר $b$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $b$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $b$ למערכת אין שום פיתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $b$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

4. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-y+(2+a)z=4+a \\ 3x+ay+3z=7-a \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פיתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

5. עבור אילו ערכים של פרמטר ממשי $a$ למערכת

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - x_2 + (2+a)x_3 = 3+a \\ 3x_1 + ax_2 + 3x_3 = 6+a \end{cases}$$

יש פתרון יחיד ? אין פתרון ? יש אין-סוף פתרונות ?

6. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x + ay + 6z = a \\ x + 2y + 3az = 2 \\ x + 3y + 2az = 4 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

7. מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר $k$ יש למערכת הבאה אינסוף פתרונות, פתרון יחיד ואין פתרון.

$$\begin{cases} x_1 + kx_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + (k-2)x_3 = 1 \\ kx_1 - kx_3 = 0 \end{cases}$$

8. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} bx + y + z = b \\ x + by + z = b \\ x + y + bz = b \end{cases}$$

כאשר $b$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $b$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $b$ למערכת אין שום פיתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $b$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

**9**. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+by-3z=b \\ 2x+3y+bz=3 \end{cases}$$

כאשר $b$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $b$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $b$ למערכת אין שום פיתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $b$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

**10.**

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ax+2y+z=a \\ 2x+y+2z=-1 \\ x+2y+az=1 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

**11** ✓

נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ 4x+ay+2z=a \\ ax+y+3z=1 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

12.נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} -x+y+2z=7 \\ ax+2y+z=8 \\ y+az=5 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

13. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+by-3z=2 \\ 2x+3y+bz=3 \end{cases}$$

כאשר $b$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $b$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $b$ למערכת אין שום פיתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $b$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

14. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ay+z=0 \\ -x+ay+z=-a \\ x+a^2y+z=a^3 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

15. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+az=a \\ ax+ay+z=1 \\ x+ay+az=2 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

16. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ay+z=0 \\ -x+ay+z=-a \\ x+a^2y+z=a^3 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

17.נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} -x+y+2z=7 \\ ax+2y+z=8 \\ y+az=5 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

18.נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+az=-1 \\ 3x+(a+1)y+(a-1)z=-1 \\ ax+2y+z=0 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

**19**. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} ax+y+z=1 \\ 4x+ay+2z=a \\ ax+y+3z=1 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פיתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

20.נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+ay+z=0 \\ ax+y+az=0 \\ (a+1)x-y+z=1 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

21. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+ay+2z=1 \\ x+(2a-1)y+3z=1 \\ ax-y-z=2a-1 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

22. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x-y+(2+a)z=4+a \\ 3x+ay+3z=8-a \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ יש למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת אין שום פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

23. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} 2x+y+az=1 \\ x+2y+z=a \\ ax+y+2z=1 \end{cases}$$

כאשר $a$ הוא פרמטר ממשי.

א. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערכים של $a$ אין למערכת אף פתרון ?

ג. עבור איזה ערכים של $a$ למערכת יש אינסוף פתרונות ?

25.11.19

# לינארית - תירגול

## מטריצות

$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ כאשר יש 2 שורות ו-3 עמודות.

## חיבור מטריצות

מחברים איבר איבר. המטריצות צריכות להיות מאותו הסדר $(n\times m)$

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

חשב את הביטויים הבאים:

- $A+B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$

## כפל בסקלר (מספר)

מכפילים במספר את כל אחד מאיברי המטריצה

- $A+C =$ לא מוגדר
- $-2A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -2 & 6 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$
- $-A+3B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 18 & 0 \\ -9 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 17 & 3 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & 2D & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \\ -5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & -3 & -5 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix} = 2D$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 4 & -8 & 2 \\ 6 & 2 & -6 \end{pmatrix} = 2D$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} = D$$

4) $\begin{pmatrix} x & 2y \\ 0 & 3z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2y & 3z \\ 2x & -x+7y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 & x-3 \\ 5-3y & -8 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x+2y & 2y+3z \\ 2x & 3z-x+7y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z-1 & -x+3 \\ -5+3y & 8 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x+2y-z-1 & -x+2y+3z+3 \\ 2x+3y-5 & -x+7y+3z+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 7 & 3 & -8 \end{array}\right) \underset{\substack{R_3-2R_1\to R_3 \\ R_4+R_1\to R_4}}{\overset{R_2+R_1\to R_2}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 2 & -7 \end{array}\right) \overset{\frac{R_3}{-1}\to R_3 \;\to\; R_2\leftrightarrow R_3}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & -2 \\ 0 & 9 & 2 & -7 \end{array}\right) \underset{\substack{R_1-2R_2\to R_1 \\ R_4-9R_2\to R_4}}{\overset{R_3-4R_2\to R_3}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \end{array}\right) \underset{\frac{R_3}{10}\to R_3}{\overset{\frac{R_4}{20}\to R_4}{=}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & +3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2+2R_3\to R_2 \\ R_1-3R_3\to R_1}}{\overset{R_4-R_3\to R_4}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x = 4$
$y = -1$
$z = 1$

## כפל מטריצות

$$A_{n\times k} \cdot B_{k\times m} = C_{n\times m}$$

כדי שיהיה אפשר לכפול מטריצות צריך שמספר העמודות במטריצה שמאל תהיה שווה למספר שורות במטריצה ימין.

### תרגיל

$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ , $B_{3\times2} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 0 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} -19 & 38 \\ 12 & -20 \end{pmatrix}_{2\times2}$$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix} 22 & 3 & -51 \\ 2 & -1 & 3 \\ 24 & 4 & -60 \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&4&-2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0\\3&4\\-1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}6\\4\end{pmatrix}$$

$B\cdot A=$ לא מוגדר.

## מטריצה משוחלפת

שחלוף מחליפה את השורה לעמודה.

סימון $A^t$, אם $A_{n\times m}$ אז $A^t_{m\times n}$

**לדוגמא**

$A=\begin{pmatrix}1&-2&4\\0&-5&7\end{pmatrix}_{2\times 3}$ אז $A^t=\begin{pmatrix}1&0\\-2&-5\\4&7\end{pmatrix}_{3\times 2}$

3) $$\underbrace{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}_{2\times2}X_{n\times m}}_{\substack{n=2\\\text{בשביל כפל}}}-\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}X\right)^T=\underbrace{X_{n\times m}-X^T_{m\times n}}_{\substack{m=n\\\text{בשביל חיסור}}}\implies X_{2\times2}=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}$$

מסדר $2\times2$

שחלוף

$$X^T=\begin{pmatrix}x&z\\y&w\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}\right)^T=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&z\\y&w\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}z&w\\-x&-y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}z&w\\-x&-y\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}0&y-z\\z-y&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}z&w\\-x&-y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}z&-x\\w&-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-(z-y)\\z-y&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&w+x\\-x-w&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&y-z\\z-y&0\end{pmatrix}\implies\begin{pmatrix}0&x-y+z+w\\-x+y-z-w&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&1&0\\-1&1&-1&-1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2+R_1\to R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

x-קשור

אינסוף פתרונות

y,z,w - חופשיים

$$x=y-z-w\implies X=\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y-z-w&y\\z&w\end{pmatrix}$$

2.12.19

# לינארית תירגול

## תזכורת

$A_{n\times m}=(a_{ij})$ מטריצה.

המשוחלפת של $A$ היא $A^T_{m\times n}=(a_{ij})$.

### דוגמא

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ 7 & 6 & -4\end{pmatrix} \qquad A^T=\begin{pmatrix}-1 & 7\\ 0 & 6\\ 5 & -4\end{pmatrix}$$

## תכונות של שיחלוף

1) נתון $A_{n\times m}$ , $B_{n\times m}$

$$(A+B)^T=A^T+B^T$$

2) נתון $A_{n\times k}$ $B_{k\times m}$

$$(A\cdot B)^T=B^T\cdot A^T$$

3) $k$ סקלר

$$(k\cdot A)^T=k\cdot A^T$$

## הגדרה

יהי $A_{n\times n}$ מטריצה.

$A$ נקראת מטריצה סימטרית אם $A^T=A$

### דוגמאות

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 6\end{pmatrix} = A^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix}$$ ולכן, סימטרי.

## תרגיל

הוכח או סתור ע"י דוגמא נגדית:

נתון: $A_{n\times n}$ , $B_{n\times n}$ מטריצות סימטריות.

1) $A+B$ סימטרי $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$A\cdot B$ סימטרי

### פתרון

נתון $A$ סימטרית ⟸ נתון $A^T=A$

$B$ סימטרית ⟸ נתון $B^T=B$

פתרון

נתון A סימטרית ← $A^T=A$

B סימטרית ← $B^T=B$.

1) צ"ל A+B סימטרית ← $(A+B)^T=A+B$.

$$(A+B)^T \underset{\text{משפט}}{=} A^T+B^T \underset{\text{נתון}}{=} A+B$$

2) צ"ל A·B סימטרית ← $(A\cdot B)^T=A\cdot B$

$$(A\cdot B)^T \underset{\text{משפט}}{=} B^T\cdot A^T \underset{\text{נתון}}{=} B\cdot A \underset{\text{בדרך כלל}}{\neq} AB$$

דוגמא נגדית: $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&-3\\-3&4\end{pmatrix}$

$A^T=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=A$ $B^T=\begin{pmatrix}1&-3\\-3&4\end{pmatrix}=B$

ולכן, A, B שנתנו סימטריות.

$$(A\cdot B)^T=\left[\begin{pmatrix}1&-3\\-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\right]^T=\left[\begin{pmatrix}-5&5\\-7&16\end{pmatrix}\right]^T=\begin{pmatrix}-5&-7\\5&16\end{pmatrix}\neq AB$$

ולכן, לא סימטרי.

להוכחה של אם"ם
מראים שימין נכון בעזרת שמאל.
מראים ששמאל נכון בעזרת ימין.

תרגיל

נתון A,B סימטריות. הוכח AB סימטרי $\longleftrightarrow$ AB=BA

הוכחה

נתון $A^T=A$, $B^T=B$.

← נתון AB סימטרי ונוכיח AB=BA

$$(AB)\underset{\text{נתון}}{=}(AB)^T\underset{\text{משפט}}{=}B^T\cdot A^T\underset{\text{נתון}}{=}B\cdot A$$

→ נתון AB=BA ונוכיח שAB סימטרית

$$(A\cdot B)^T\underset{\text{משפט}}{=}B^T\cdot A^T\underset{\text{נתון}}{=}B\cdot A\underset{\text{נתון}}{=}A\cdot B$$

## מטריצת היחידה

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , $I_n = \begin{cases} 1 & I=J \\ 0 & I\neq J \end{cases}$

$A \cdot I = A$

$I \cdot A = A$

## מטריצה הפיכה

יהי $A_{n\times n}$ מטריצה.

$A$ מטריצה הפיכה אם קיימת $B_{n\times n}$ כך ש $A\cdot B = I$ וגם $BA=I$.

נסמן $B=A^{-1}$ , ו- $B$ נקראת ההופכית של $A$.

### דוגמאות

1) $I_n \cdot I_n = I_n$ לכן, $I_n$ הפיכה. $I_n = I_n$.

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ולכן $A$ לא הפיכה.

### תרגיל

בדוק האם המטריצה הפיכה. אם כן מצאו את ההופכית שלה.

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

צריך למצוא $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ כך ש $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+2z & y+2w \\ 2x+4z & 2y+4w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x+2z=1 \\ 2x+4z=0 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} y+2w=0 \\ 2y+4w=1 \end{cases} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

אותו הדבר, נפתור פעם אחת.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

סתירה, אין פיתרון

ולכן אין מטריצה $B$ כזאת.

ולכן $A$ לא הפיכה.

(2 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\z&w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x+2z&y+2w\\3x+4z&3y+4w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x+2z=1\\3x+4z=0\end{cases}\rightarrow \mathrm{I}\qquad \begin{cases}y+2w=0\\3y+4w=1\end{cases}\rightarrow \mathrm{II}$$

שקולים

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{array}\right)=\ R_2-3R_1\to R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{array}\right)=\ \frac{R_2}{-2}\to R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)=\ R_1-2R_2\to R_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-2&1\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{array}\right)\qquad x=-2\quad y=\frac{3}{2}\quad z=1\quad w=-\frac{1}{2}$$

$$B=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

נעשה בדיקה

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

A הפיכה

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

אלגוריתם למציאת $A^{-1}$

עושים פעולות עד שמגיעים מ- $(A\mid I)$ ל- $(I\mid A^{-1})$

אם עושים פעולות ולא מתקבלת מטריצת היחידה $I_n$ מצד שמאל אז $A$ לא הפיכה.
כלומר, יש מצב שמאל של הקו שורת אפסים.

מתקדם

28) $B=$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&3&4&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)=\ R_1\leftrightarrow R_3\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\\2&3&4&1&0&0\end{array}\right)=\ R_3-2R_1\to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\\0&3&2&1&0&-2\end{array}\right)=\ R_3-3R_2\to R_3\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\\0&0&-1&1&-3&-2\end{array}\right)=\ \frac{R_3}{-1}\to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&-1&3&2\end{array}\right)=\ \begin{matrix}R_1-R_3\to R_1\\R_2-R_3\to R_2\end{matrix}\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-3&-1\\0&1&0&1&-2&-2\\0&0&1&-1&3&2\end{array}\right)$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&-3&-1\\1&-2&-2\\-1&3&2\end{pmatrix}$$

## תרגיל 2

בדוק האם $\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$ הפיכה.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\4&5&6&0&1&0\\7&8&9&0&0&1\end{array}\right) \begin{array}{l}R_2-4R_1\to R_2\\ =R_3-7R_1\to R_3\end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&-6&-12&-7&0&1\end{array}\right) = \quad R_3+2R_2\to R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-6&-4&1&0\\0&0&0&-15&2&1\end{array}\right)$$

שורת סתירה!
לכן $A$ לא הפיכה.

## פתרון מערכת משוואות ע"י $A^{-1}$

$2x=7 \;/\cdot\frac{1}{2}$ הופכי של 2

$\Leftarrow$

$(\frac{1}{2}\cdot 2)\cdot x = 7\cdot\frac{1}{2}$

$x = 7\cdot\frac{1}{2}$

$A\cdot X = B$

$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B$

$X = A^{-1}\cdot B$

מהדף

33) ב) $\begin{pmatrix}2&1&-1\\0&2&1\\5&2&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$
שקול למערכת =

נפתור כדי למצוא $A^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\5&2&-3&0&0&1\end{array}\right) \overset{2R_3-5R_1\to R_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\0&2&1&0&1&0\\0&-1&-1&-5&0&2\end{array}\right) = \quad R_2\leftrightarrow R_3 \;\to\; \frac{R_2}{-1}\to R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\0&+1&+1&+5&0&-2\\0&2&1&0&1&0\end{array}\right) \overset{R_3-2R_2\to R_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&-1&1&0&0\\0&1&1&5&0&-2\\0&0&-1&-10&1&4\end{array}\right) = \begin{array}{l}R_2+R_3\to R_2\\R_1-R_3\to R_1\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&0&11&-1&-4\\0&1&0&-5&1&2\\0&0&-1&-10&1&4\end{array}\right) = \begin{array}{l}\frac{R_3}{-1}\to R_3\\R_1-R_2\to R_1\end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&16&-2&-6\\0&1&0&-5&1&2\\0&0&1&10&-1&-4\end{array}\right) = \frac{R_1}{2}\to R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&8&-1&-3\\0&1&0&-5&1&2\\0&0&1&10&-1&-4\end{array}\right)$$

נעשה
$X=A^{-1}\cdot B$

$$\begin{pmatrix}8&-1&-3\\-5&1&2\\10&-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-5\\12\end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{array}{l}x_1=9\\x_2=-5\\x_3=12.\end{array}$$

## תכונות של מטריצה הפיכה

נתון $A_{n\times n}$ , $B_{n\times n}$ מטריצות הפיכות.

1) $(A^{-1})^{-1}=A$

2) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

3) נתון $K\neq 0$ מספר $(K\cdot A)^{-1}=\frac{1}{K}\cdot A^{-1}$

4) $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$

16.12.19

# לינארית - תירגול

## דטרמיננטה

מרדפים משוב

### דרך א'

$$6)\ |C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & -4 \\ 2 & -6 & 18 & 8 \\ -5 & 6 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 6 & 6 & -4 \\ -6 & 18 & 8 \\ 6 & 9 & 0 \end{vmatrix}}_{\mathrm{I}} \overbrace{- 0 \begin{vmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 2 & 18 & 8 \\ -5 & 9 & 0 \end{vmatrix}}^{0} - 3 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 2 & -6 & 8 \\ -5 & 6 & 0 \end{vmatrix}}_{\mathrm{II}} - 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 2 & -6 & 18 \\ -5 & 6 & 9 \end{vmatrix}}_{\mathrm{III}} =$$

פיתוח לפי שורה 1

$$\mathrm{I}\quad \begin{vmatrix} 6 & 6 & -4 \\ -6 & 18 & 8 \\ 6 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 18 & 8 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = 6(48+72) - 9(48-24) = 504$$

לפי שורה 3

$$\mathrm{II}\quad \begin{vmatrix} 0 & 6 & -4 \\ 2 & -6 & 8 \\ -5 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -6 & 8 \end{vmatrix} = -2(24) - 5(48-24) = -168$$

עמודה 1

$$\mathrm{III}\quad \begin{vmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 2 & -6 & 18 \\ -5 & 6 & 9 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ -6 & 18 \end{vmatrix} = -2(\overset{-36}{54+36}) - 5(\overset{-720}{108+36}) = -756$$

עמודה 1

$$\mathrm{I} - 3\,\mathrm{II} - 2\,\mathrm{III} = 2520$$

### דרך ב'

חייב להיות מקדם 1 אחרת זה משנה את הדטרמיננטה

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & -4 \\ 2 & -6 & 18 & 8 \\ -5 & 6 & 9 & 0 \end{vmatrix} \underset{1\cdot R_4 + 5R_1 \to R_4}{\overset{1\cdot R_3 - 2R_1 \to R_3}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & -6 & 24 & 4 \\ 0 & 6 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot \begin{vmatrix} 6 & 6 & -4 \\ -6 & 24 & 4 \\ 6 & -6 & 10 \end{vmatrix} =$$

פיתוח לפי עמודה 1

אפשר להוציא גורם משותף מעמודה או שורה. אבל לא ביחד.

$$6\cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & -4 \\ -1 & 24 & 4 \\ 1 & -6 & 10 \end{vmatrix} = 6\cdot 6\cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{C_1 + C_2 \to C_1}{=} 72\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{=} -72 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

(אפשר לעשות ב det פעולות על עמודות)

פיתוח עמודה 2

$$-72\left[-2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}\right] = -72\big(-2(20+2) + 3(5-2)\big) = -72(-35) = 2520$$

# תכונות של דטרמיננטה

נתון $A_{n\times n}, B_{n\times n}$ ו- $k\neq 0$ מספר.

1) מותר להוסיף לשורה או עמודה שורות או עמודות האחרות בהתאם. אבל אסור להוסיף את השורה או עמודה לעצמה. זאת אומרת, מותר לקחת רק פעם אחת שורה או עמודה שמכניסים לתוכה.

2) כל החלפת שורות או עמודות, מכפילים את הדטרמיננט ב-$(-1)$.

3) אפשר להוציא גורם משותף משורה או עמודה אבל לא ביחד משתיהן. זאת אומרת, רק פעם אחת כל פעם. הדטרמיננט יהיה הגורם שהוצאנו כפול שאר חישוב הדטרמיננט.

4) $|AB| = |A|\cdot|B|$

5) $|A^t| = |A|$

6) אם $A$ הפיכה אז $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

7) $A$ הפיכה אמ"מ $|A|\neq 0$.

8) אם $|A|\neq 0$ אז למערכת $AX=B$ $\left[A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\\\vdots\\B_n\end{pmatrix}\right]$ יש פתרון יחיד.

9) אם הדטרמיננט משולשית עליונה $\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot\ldots\cdot a_{n,n}$ אז הדטרמיננט מכפלת האלכסון הראשי.

10) $|kA| = k^n|A|$ (כי מוציאים $k$ מכל שורה ויש $n$ שורות).

מתקדמים

1.7) $|A| = \begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix} \overset{R_1\leftrightarrow R_4}{=} -\begin{vmatrix}1&1&1&3\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\3&1&1&1\end{vmatrix} \overset{\substack{R_2-R_1\to R_2\\R_3-R_1\to R_3\\R_4-3R_1\to R_4}}{=} -\begin{vmatrix}1&1&1&3\\0&2&0&-2\\0&0&2&-2\\0&-2&-2&-8\end{vmatrix} \underset{\text{עמודה 1}}{=}$

$-1\begin{vmatrix}2&0&-2\\0&2&-2\\-2&-2&-8\end{vmatrix} = -1\cdot2\cdot2\cdot2\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\-1&-1&-4\end{vmatrix} \overset{R_3+R_1\to R_3}{=} -8\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&-1&-5\end{vmatrix} \underset{\text{עמודה 1}}{=} -8\begin{vmatrix}1&-1\\-1&-5\end{vmatrix} =$

$-8(-5-1) = 48$

1.8) $\begin{vmatrix} 9 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 9 \end{vmatrix} = \left| 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right| = 3^4 \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}_{48} = 3^4 \cdot 48 = 81 \cdot 48 = 3888$

מתרגיל קודם.

## תרגיל

לאילו ערכי $k$ למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, אין פתרונות.

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k \\ x_1 + kx_2 + x_3 = k \\ x_1 + x_2 + kx_3 = k \end{cases}$$

## פתרון

$$\begin{pmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ k \end{pmatrix}$$

אם $\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \neq 0$ אז למערכת פתרון יחיד.

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} \underset{R_1 - R_2 \to R_1}{=} \begin{vmatrix} k-1 & 1-k & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = (k-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} =$$

גורם משותף $(k-1)$     שורה 1

$$= (k-1)\left[ \begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} \right] = (k-1)\Big( \overset{(k-1)(k+1)}{(k^2-1)} + (k-1) \Big) = (k-1)(k^2+k-2) \neq 0$$

$k = 1$

$k^2 + k - 2 \neq 0$

$k \neq 1$    $k \neq -2$

פתרון יחיד כאשר $k \neq 1$, $k \neq -2$.

**נבדוק** $\underline{k=1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{R_3 - R_1 \to R_3}{\overset{R_2 - R_1 \to R_2}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

אינסוף פתרונות

$\underline{k=-2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \underset{R_1 \leftrightarrow R_3}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{R_3 + 2R_1 \to R_3}{\overset{R_2 - R_1 \to R_2}{=}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{array}\right) \underset{R_3 + R_2 \to R_3}{=}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

שורת סתירה
אין פתרון.

3.1) $A = \begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -5 & t+2 \end{pmatrix}$ $|A| \neq 0$

$$\begin{vmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -5 & t+2 \end{vmatrix} \overset{R_1 - R_2 \to R_1}{=} \begin{vmatrix} t-4 & 4-t & 0 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -5 & t+2 \end{vmatrix} = (t-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & t-5 & 1 \\ 6 & -5 & t+2 \end{vmatrix} \overset{C_2 + C_1 \to C_2}{=}$$

$$= (t-4) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & t+2 & 1 \\ 6 & 1 & t+2 \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח שורה 1}}{=} (t-4) \cdot \begin{vmatrix} t+2 & 1 \\ 1 & t+2 \end{vmatrix} = (t-4)\left((t+2)^2 - 1\right) \neq 0$$

$t \neq 4$

$t^2 + 4t + 3 \neq 0$

$t \neq -3$ $t \neq -1$

אז כדי ש $A$ תהיה הפיכה $t \neq 4, -3, -1$.

23.12.12

# לינארית - תירגול

מהשיעורים.

4.2) $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \frac{2y+z}{3} & \frac{2z+x}{3} & \frac{2x+y}{3} & 1 \end{vmatrix} \overset{R_4 - \frac{2R_2+R_3}{3} \to R_4}{=} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

## שיטת קרמר

21) (ג) $\begin{cases} x + y = -1 \\ x + y + z = 2 \\ 2y + 2z = 4 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \overset{R_2 - R_1 \to R_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -1(2-0) = -2 \neq 0$$

לפי שורה 2

יש פתרון בשיטת קרמר.

עמודת פיתרונות

$$x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \left|\begin{matrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{matrix} = -2 + 4 - (4-2) = 2 - 2 = 0 \quad , \quad x = \frac{0}{-2} = 0$$

עמ' פיתרונות

$$y = \left|\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{matrix} = 4 - (-2+4) = 4 - 2 = 2 \quad , \quad y = \frac{2}{-2} = -1$$

$$z = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix} = 4 - 2 - (4+4) = 2 - 8 = -6 \quad z = \frac{-6}{-2} = 3.$$

21) ה)
$$\begin{cases} 2x + y = 3 - 4z \\ 6z = 3x \\ 3x + y = z + 2 - 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 3 \\ -3x + 6z = 0 \\ 5x + y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -3 & 0 & 6 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{array}\right| = 30 - 12 - (3+12) = 18 - 15 = 3$$

$$x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right| = 12 - 18 = -6 \qquad \frac{-6}{3} = -2$$

$$y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & 6 & -3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right| = 90 - 24 - (9 + 24) = 90 - 57 = 33 \qquad \frac{33}{3} = 11$$

$$z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right| = -9 + 6 = -3 \qquad \frac{-3}{3} = -1$$

25)
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + 2y + z = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$0 \neq \left|\begin{array}{ccc|cc} a & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 & a \end{array}\right| = 2a + 1 + a - (1 + a^2 + 2) = -a^2 + 3a - 2 \neq 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

כאשר $a=1$ וכאשר $a=2$ יש פתרון יחיד.

ב) $x = y$

$$x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2 & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 & a \end{array}\right| = 2 + 1 + a^2 - (a + a + 2) = 1 + a^2 - 2a \qquad x = \frac{a^2 - 2a + 1}{-a^2 + 3a - 2}$$

$$y = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = a^2 + 1 + 1 - (1 + a + a) = a^2 - 2a + 1 \qquad y = \frac{a^2 - 2a + 1}{-a^2 + 3a - 2}$$

$x = y \Rightarrow \frac{a^2 - 2a + 1}{\ldots} = \frac{a^2 - 2a + 1}{\ldots}$ כאשר $a \neq 1,2$ $\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = a^2 - 2a + 1 \Rightarrow 0 = 0$

כאשר $a \neq 1,2$

16) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 2 \\ a & 1 \\ 1 & a \end{matrix} = 4+2+a^3-(4a+2a+a) = a^3-7a+6$

$$0 \neq \begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = C_2 - C_3 \to C_2 \quad \begin{vmatrix} 2 & 2-a & a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & a-2 & 2 \end{vmatrix} = (2-a)\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ a & 0 \\ 1 & -1 \end{matrix} =$$

$$(2-a)\left[1-a^2-(2a-2)\right] = (2-a)(-a^2-2a+3)$$

$2 \neq a$

$a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2} = -3,\ 1$

$a \neq 1, 2, -3$

$$x = \begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & a \end{matrix} = \cancel{4}+2+a^2-(\cancel{4}+2a+a) = a^2-3a+2 \qquad x = \frac{a^2-3a+2}{(2-a)(-a^2-2a+3)}$$

$$z = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 2 \\ a & 1 \\ 1 & a \end{matrix} = \cancel{2}+2+2a^2-(2a+2a+\cancel{2}) = 2a^2-4a+2 \qquad z = \frac{2a^2-4a+2}{(2-a)(-a^2-2a+3)}$$

$a^2-3a+2 = 2a^2-4a+2$

$0 = a^2 - a$

$0 = a(a-1)$

$a=0$ $\quad$ $a=1$

כאשר $a=0$ קיים פיתרון יחיד $x=z$!

## חישוב $A^{-1}$ ע"י מטריצה הפוכה

נתון $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&8\end{pmatrix}$

בודקים ש-⊛ לא 0, והפיכה.

$$M\;\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}5&6\\8&8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4&6\\7&8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}4&5\\7&8\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2&3\\8&8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3\\7&8\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\7&8\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2&3\\5&6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3\\4&6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\4&5\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overset{+}{-8} & \overset{-}{-10} & \overset{+}{-3}\\ \overset{-}{-8} & \overset{+}{-13} & \overset{-}{-6}\\ \overset{+}{-3} & \overset{-}{-6} & \overset{+}{-3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8&10&-3\\8&-13&6\\-3&6&-3\end{pmatrix} = Adj(A)$$

⊛ $$|A| = \left|\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&8\end{matrix}\right|\begin{matrix}1&2\\4&5\\7&8\end{matrix} = 40+84+96-(64+48+105) = 220-217 = 3 \neq 0$$

ולכן הפיכה.

**משפט**

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot (A^*)^T$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-8&10&-3\\8&-13&6\\-3&6&-3\end{pmatrix}^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-8&8&-3\\10&-13&6\\-3&6&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{8}{3}&\frac{8}{3}&-1\\ \frac{10}{3}&-\frac{13}{3}&2\\ -1&2&-1\end{pmatrix}$$

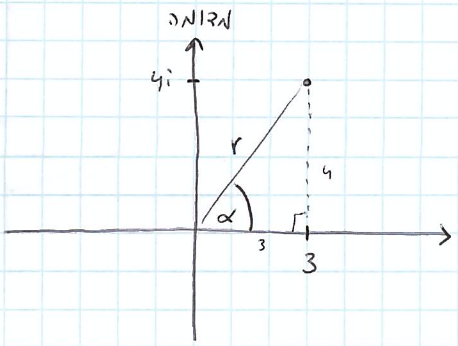
אם במקום $\frac{8}{3}$ היה $\frac{10}{3}$ זה היה סימטרי.

# לינארית - תירגול

## מספרים מרוכבים

$i=\sqrt{-1}$

1) $Z=3+4i$




* זווית לוקחים משעה 3 נגד כיוון השעון.

$\underbrace{Z=3+4i}_{\text{קרטזי}} = 5\cos(53.15)+5\sin(53.13)$

$= 5(\cos(53.15)+\sin(53.13))=$

$\underbrace{5\ cis\ 53.13}_{\text{פולרי}}$

- $r=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$
- $\tan\alpha=\frac{4}{3}$

  $\alpha=53.13^\circ$
- $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

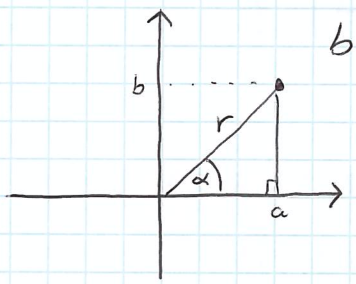
  $5\cos(53.15)=3$
- $\sin(53.13^\circ)=\frac{4}{5}$

  $5\sin(53.13^\circ)=4$

### מקרה I

$Z=a+bi$

$b>0\ ,\ a>0$




$r=\sqrt{a^2+b^2}$

$\tan\alpha=\frac{b}{a}$

$a=r\cos\alpha$

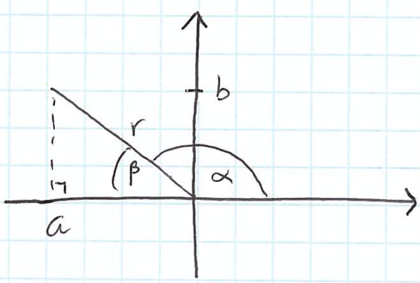
$b=r\sin\alpha$

$Z=r\ cis\alpha$

### מקרה II

$Z=a+bi$

$b>0,\ a<0$




$r=\sqrt{a^2+b^2}$

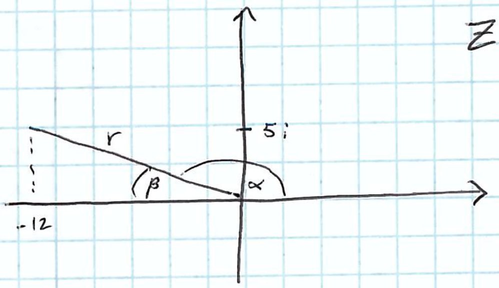
$\tan\beta=\left|\frac{b}{a}\right|$ ← זווית חיובית

$\alpha=180-\beta$

$Z=r\,cis\,\alpha$

דוגמא

$Z=-12+5i$




$r=\sqrt{(-12)^2+5^2}=13$

$\tan\beta=\left|\frac{5}{-12}\right|=\frac{5}{12}$

$\beta=22.61$

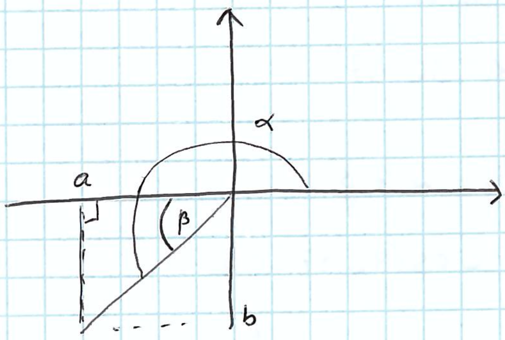
$\alpha=180^\circ-22.61^\circ=157.39$

$Z=13\ cis\ (157.39)$

מקרה III

$z=a+bi$

$b<0\ ,\ a<0$




$r=\sqrt{a^2+b^2}$

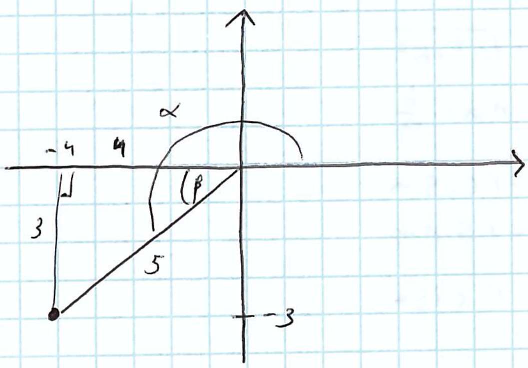
$\tan\beta=\left|\frac{b}{a}\right|$

$\alpha=180^\circ+\beta$

$Z=r\,cis\,\alpha$

דוגמא

$Z=-4-3i$




$r=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$

$\tan\beta=\left|\frac{-3}{-4}\right|=\frac{3}{4}$

$\beta=36.87$

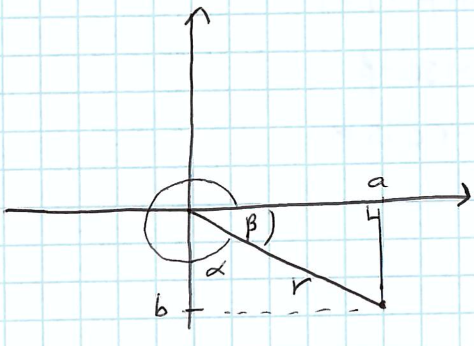
$\alpha=36.87+180=216.87$

$Z=5\ cis\ (216.87)$

מקרה IV

$z=a+bi$

$b<0\ ,\ a>0$




$r=\sqrt{a^2+b^2}$

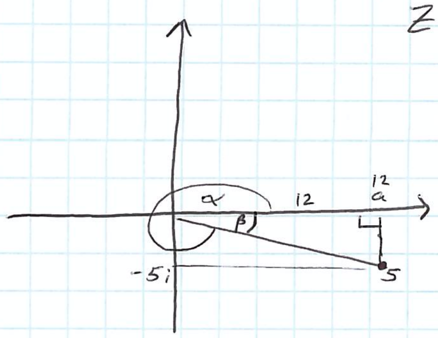
$\tan\beta=\left|\frac{b}{a}\right|$

$\alpha=360^\circ-\beta$

$Z=r\,cis\,\alpha$

דוגמא

$Z = 12 - 5i$




$r = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$

$\tan\beta = \left|\frac{-5}{12}\right| = \frac{5}{12}$

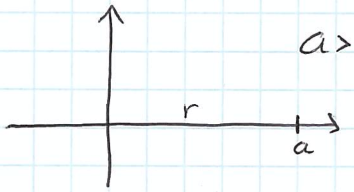
$\beta = 22.61$

$\alpha = 360 - 22.61 = 337.39$

$Z = 13 \text{ cis } (337.39)$

מקרים מיוחדים

1) $Z = a$ , $a > 0$

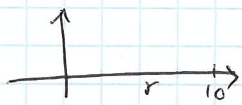



$\alpha = 0$

$r = a$

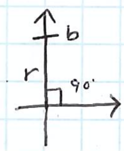
$Z = a \text{ cis}(0)$

דוגמא: $Z = 10$ ,




$\alpha = 0$
$r = 10$
$Z = 10 \text{ cis } 0^\circ$

2) $Z = bi$ , $b > 0$

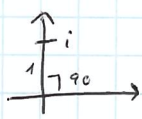



$r = b$

$\alpha = 90^\circ$

$Z = b \text{ cis } 90^\circ$

דוגמא: $Z = i$

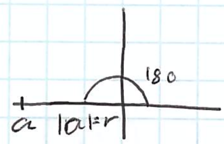



$r = 1$

$\alpha = 90^\circ$

$Z = 1 \text{ cis } 90^\circ$

3) $Z = a$ , $a < 0$

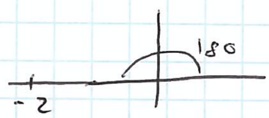



$r = |a|$

$\alpha = 180^\circ$

$Z = |a| \text{ cis}(180^\circ)$

דוגמא: $Z = -2$




$r = |-2| = 2$

$\alpha = 180$

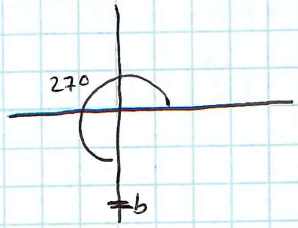
$Z = 2 \text{ cis } (180^\circ)$

4) $Z=bi$ , $b<0$

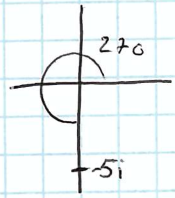
$r=|b|$

$\alpha=270^\circ$

$Z=|b|\,cis(270^\circ)$




דוגמה: $Z=-5i$




$r=|-5|=5$

$\alpha=270^\circ$

$Z=5\,cis(270^\circ)$

תרגיל

א) כתוב את $Z$ בצורה $Z=r\,cis\,\alpha$

1) $Z=-1-i$ , $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ , $\tan\beta\left|\frac{-1}{-1}\right|=1$ $\beta=45$ , $\alpha=225$ $Z=\sqrt{2}\,cis\,225$

2) $Z=-i$ $r=1$ , $\alpha=270$ $Z=1\,cis270$

3) $Z=4-3i$ $r=5$ , $\tan\left|\frac{-3}{4}\right|=\frac{3}{4}$ $\beta=36.86$ , $\alpha=323.13$ $Z=5\,cis\,323.13$

4) $Z=-10$ $r=10$ $\alpha=180$ $Z=10\,cis\,180$

5) $Z=6+8i$ $r=10$ $\tan\alpha=\frac{8}{6}$ $\alpha=53.13$ $Z=10\,cis\,53.13$

6) $Z=-8+6i$ $r=10$ $\tan\beta\left|-\frac{6}{8}\right|=\frac{6}{8}$ $\alpha=143.13$ $Z=10\,cis\,143.13$

ב) כתוב את $Z$ בצורה $Z=a+bi$

1) $Z=7\,cis\,135$ $7\cos135+7\sin135i$ $Z=-4.95+4.94i$

2) $Z=10\,cis\,300$ $10\cos300+10\sin300$ $Z=5+8.66i$

הערה על תרגיל 1 - דרך פיתרון:

עדיף להעזר בציור. רדיוס מחשבים כרגיל $\sqrt{a^2+b^2}$ לכל המקרים.

ה $\tan\alpha$ / $\tan\beta$ זה במחשבון shif tan כדי לחשב זווית, ואז

חלק מדומה חלקי חלק ממשי. $\alpha$ זה לפי המיקום ברביע (אם צריך להוסיף או לחסור זווית).

הערה על תרגיל 2 -

מפצלים את $cis\alpha$ ל $\cos\alpha+\sin\alpha i$ ועושים כפול עם המקדם של cis. מחשבים

רגיל במחשבון ויוצא לנו את הממשי מ cos ומדומה מ sin.

## כפל וחילוק

נתון $Z_1 = r_1 \operatorname{cis} \alpha_1 \quad , \quad Z_2 = r_2 \operatorname{cis} \alpha_2$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

### דוגמא

$Z_1 = 9 \operatorname{cis} 315$

$Z_2 = 11 \operatorname{cis} 225$

חשב

מחסרים עודף 360

- $Z_1 \cdot Z_2 = 99 \operatorname{cis}(540) = 99 \operatorname{cis}(180)$
- $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{9}{11} \operatorname{cis}(315 - 225) = \frac{9}{11} \operatorname{cis} 90$

שחסרו מוסיפים 360

- $\frac{Z_2}{Z_2} = \frac{11}{9} \operatorname{cis}(225 - 315) = \frac{11}{9} \operatorname{cis}(-90) = \frac{11}{9} \operatorname{cis}(270)$

## חזקה

נתון $Z = r \operatorname{cis} \alpha$

$$Z^n = r^n \operatorname{cis}(n \cdot \alpha)$$

### דוגמא

$$\frac{(1+i)^{100}}{(1+\sqrt{3}i)^{50}}$$

$\sqrt{1^2+1^2} = r$

$\tan^{-1}(\frac{1}{1}) = 45°$

$Z_1 = 1+i \qquad Z_1 = \sqrt{2} \operatorname{cis} 45$

$Z_1^{100} = \sqrt{2}^{100} \operatorname{cis} 45 \cdot 100 = 2^{50} \operatorname{cis}(4500) \leftarrow$ $4500 = 360 \cdot 12 \cdot$ / $4500 = 12 \cdot 360 + \frac{1}{2}$ / $4500 = 12 \cdot 360 + 18$

$= 2^{50} \operatorname{cis}(180°)$

$Z_2 = (1+\sqrt{3}i) = 2 \operatorname{cis} 60°$

$Z_2^{50} = 2^{50} \cdot \operatorname{cis}(60 \cdot 50) = 2^{50} \operatorname{cis} 120°$

$$\frac{\cancel{2^{50}} \operatorname{cis} 180}{\cancel{2^{50}} \operatorname{cis} 120} =$$

$\operatorname{cis}(180-120) = \operatorname{cis} 60° =$

$= \cos 60 + \sin 60 i =$

$0.5 + 0.867i$ //

13.1.20

# לינארית - תירגול

## מספרים מרוכבים

### שורש

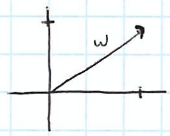
נתון $Z = r \cdot cis\,\alpha$ אז

$$\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{r} \cdot cis\frac{\alpha + 360k}{n}$$

(כאשר $k = 0, 1, \ldots, n-1$).

### לדוגמא

$$Z = \sqrt[4]{4+3i}$$




$r = \sqrt{4^2+3^2} = 5$

$\tan\alpha = \frac{3}{4}$

$\alpha = 36.87$

$w = 4+3i$

$w = 5\,cis\,36.87$

$$Z = \sqrt[4]{5} \cdot cis\frac{36.87+360k}{4}$$

$Z = \sqrt[4]{5}\; cis\,(9.21 + 90k)$ , $k = 0, 1, 2, 3$ ( כי $n = 4$ )

**$k=0$**

$Z_0 = \sqrt[4]{5}\; cis\,(9.21) =$

$= \sqrt[4]{5}\,(\cos 9.21 + \sin 9.21 i) =$

$1.495(0.98 + 0.16i) =$

$1.46 + 0.239i$

**$k=1$**

$Z_1 = \sqrt[4]{5}\; cis\,(99.21) =$

$1.495(\cos 99.21 + \sin 99.21 i) =$

$1.495(-0.16 + 0.98i) =$

$-0.24 + 1.46i$

**$k=2$**

$Z_2 = 1.495(\cos 189.21 + \sin(189.21 i)) =$

$1.495(-0.98 - 0.16i) =$

$-1.46 - 0.239i$

**$k=3$**

$Z_3 = \sqrt[4]{5}\; cis\,(279.21) =$

$= 1.495(\cos 279.21 + \sin 279.21) =$

$1.495(0.16 - 0.98i) =$

$0.24 - 1.46i$

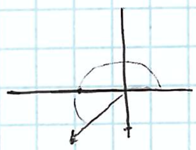
מהדק

4) מצא את כל המספרים $Z$ המקיימים

$Z^8 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$r = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{1} = 1$

$Z = \sqrt[8]{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ $\quad W = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$



$\tan\beta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 60°$

$\alpha = 180 + 60 = 240°$

$W = 1 \text{ cis } 240°$

$Z = \sqrt[8]{1} \text{ cis } \frac{240 + 360K}{8}$

$Z = 1 \text{ cis } (30 + 45K)$ $\quad K = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

$\underline{K=0}$

$Z_0 = \text{cis } 30$

$\cos 30 + \sin 30 i$

$0.866 + 0.5i$

$\underline{K=1}$

$Z_1 = \text{cis } 75$

$\cos 75 + \sin 75 i$

$0.258 + 0.96i$

$\underline{K=2}$

$Z_2 = \text{cis } 120$

$\cos 120 + \sin 120 i$

$-0.5 + 0.866i$

$\underline{K=3}$

$Z_3 = \text{cis } 165$

$\cos 165 + \sin 165 i$

$-0.96 + 0.258i$

$\underline{K=4}$

$Z_4 = \text{cis } 210$

$\cos 210 + \sin 210 i$

$-0.866 - 0.5i$

$\underline{K=5}$

$Z_5 = \text{cis } 255$

$\cos 255 + \sin 255 i$

$-0.258 - 0.96i$

$\underline{K=6}$

$Z_6 = \text{cis } 300$

$\cos 300 + \sin 300 i$

$0.5 - 0.866i$

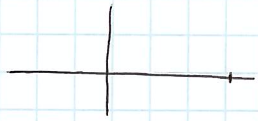
$\underline{K=7}$

$Z_7 = \text{cis } 345$

$\cos 345 + \sin 345 i$

$0.96 - 0.258i$

- $Z^5 = 32$ $\quad w = 32$



$r = 32$
$\tan\alpha = \frac{0}{32} = 0$

$$Z = \sqrt[5]{32} \text{ cis } \frac{0+360k}{5}$$

$Z = 2 \text{ cis } 72k \qquad k = 0,1,2,3,4$

| <u>k=0</u> | <u>k=1</u> | <u>k=2</u> |
|---|---|---|
| $2(\cos 0 + \sin 0 i)$ | $2(\cos 72 + \sin 72 i)$ | $2(\cos 144 + \sin 144 i)$ |
| $2 + 0i$ | $0.618 + 1.9i$ | $-1.61 + 1.175i$ |

| <u>k=3</u> | <u>k=4</u> |
|---|---|
| $2(\cos 216 + \sin 216 i)$ | $2(\cos 288 + \sin 288 i)$ |
| $-1.61 - 1.175i$ | $0.618 - 1.9i$ |

E4

$$\begin{cases} (1-3i)x - (2+i)y = (-7-7i) \\ (2-4i)x + (3-3i)y = (14-16i) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1-3i & -2-i \\ 2-4i & 3-3i \end{vmatrix} = (1-3i)(3-3i) - (-2-i)(2-4i) =$$

$$= 3 - 3i - 9i - 9 - (-4 + 8i - 2i - 4) = -6 - 12i + 8 - 6i = 2 - 18i \neq 0$$

<u>X</u>

$$\begin{vmatrix} -7-7i & -2-i \\ 14-16i & 3-3i \end{vmatrix} = (-7-7i)(3-3i) - (-2-i)(14-16i) = -21 + \cancel{21i} - \cancel{21i} - 21 - (-28 + 32i - 14i - 16)$$

$$= (-42) - (-44 + 18i) = 2 - 18i$$

$$X = \frac{2-18i}{2-18i} = 1$$

$\underline{y}$

$$\begin{vmatrix} 1-3i & -7-7i \\ 2-4i & 14-16i \end{vmatrix} = (1-3i)(14-16i)-(-7-7i)(2-4i) =$$

$$= 14-16i-42i-48-(-14+28i-14i-28) = -34-58i+42-14i = 8-72i$$

$$y = \frac{8-72i}{2-18i} = \frac{(8-72i)(2+18i)}{(2-18i)(2+18i)} = \frac{16+144i-144i+1296}{328} = 4_{''}$$

22) $\begin{cases} x+yi-2z=10 \\ x-y+2iz=20 \\ ix+3iy-(1+i)z=30 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1 & i & -2 \\ 1 & -1 & 2i \\ i & 3i & -1-i \end{vmatrix} \underset{\text{פיתוח}}{\overset{\downarrow}{=}} \begin{vmatrix} -1 & 2i \\ 3i & -1-i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} i & -2 \\ 3i & -1-i \end{vmatrix} + i\begin{vmatrix} i & -2 \\ -1 & 2i \end{vmatrix} =$$

$(-2+0i)\ (0+3i)$

$$= (1+i)-\left[\left(i\cdot(-1-i)-(3i\cdot(-2))\right)\right]+i\left[-2-2\right] =$$

$$= (1+i)-\left[(-i+1)+6i\right]+(-4i) = (1+i)+(-1-5i)+(-4i) = 0+8i \quad \times$$

$$6-8i$$

$\underline{\text{חישוב } x}$

$$\begin{vmatrix} 10 & i & -2 \\ 20 & -1 & 2i \\ 30 & 3i & -1-i \end{vmatrix} = 10\cdot\left|\begin{matrix} 1 & i & -2 \\ 2 & -1 & 2i \\ 3 & 3i & -1-i \end{matrix}\right|\begin{matrix} 1 & i \\ 2 & -1 \\ 3 & 3i \end{matrix} = 10\cdot\left[1+i-6-12i-(-2i-2+6i+6)\right] =$$

$$= 10\cdot\left[-5-11i-4i-4\right] = -90-150i \quad \times \quad -70-90i$$

$$x = \frac{-70-90i}{6-8i} = \frac{(-70-90i)(6+8i)}{(6-8i)(6+8i)} = \frac{-420-560i-540i+720}{100} = 3-11i_{''}$$

# סיכום לינארית

## וקטורים

וקטור הוא סדרה סופית של מספרים

## פעולות על וקטורים

- חיבור וחיסור - ניתן לבצע רק על וקטורים מאותו המימד

$$\underset{v_1}{(a,b)} \pm \underset{v_2}{(c,d)} = \underset{v_1+v_2}{(a\pm c;\ b\pm d)}$$

### תכונות שמתקיימות עבור חיבור

$v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^n$

- סגירות - $v_1+v_2 \in \mathbb{R}^n$
- קיבוץ - $v_1+(v_2+v_3) = (v_1+v_2)+v_3$
- חילוף - $v_2+v_1 = v_1+v_2$
- קיום איבר האפס - $v_1+\bar{0} = v_1$
- קיום איבר נגדי - לכל $v \in \mathbb{R}^n$ קיים $(-v) \in \mathbb{R}^n$ המקיים $v+(-v)=\bar{0}$
- כפל בסקלר (מספר) - כאשר $v_i \in \mathbb{R}^n$ לכל $i$ וכאשר $1 \le i \le n$ , $a \in \mathbb{R}$

$$a \cdot v = (a\cdot v_1, a\cdot v_2, a\cdot v_3)$$

* $-v = (-1)\cdot v$
* $v_1 - v_2 = v_1 + (-v_2)$

### תכונות שמתקיימות עבור כפל בסקלר

$v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ , $a, b \in \mathbb{R}$

- סגירות - $a\cdot v_1 \in \mathbb{R}^n$
- קיבוציות - $(a\cdot b)\cdot v_1 = a\cdot(b\cdot v_1)$
- חוק היחידה - $1\cdot v_1 = v_1$
- חוק פילוג I - $a\cdot(v_1+v_2) = a\cdot v_1 + a\cdot v_2$
- חוק פילוג II - $(a+b)\cdot v_1 = a\cdot v_1 + b\cdot v_2$

# מטריצות

## פתרון מערכות משוואות ליניאריות/אלמינציה של גאוס

- וקטור יקרא פתרון של המערכת אמ"מ מתקיים שהצבת הקורדינטות בכל משוואה תיתן שיוויון אמיתי.

### 3 סוגי פעולות

- הכפלת שורה בסקלר - $aR_i \to R_i$
- החלפת שורה - $R_i \longleftrightarrow R_j$
- הכפלת שורה בסקלר והוספתה לשורה אחרת - $aR_i + R_j \to R_i$

- צורה מדורגת - אם בכל שורה המס' השמאלי ביותר שהוא לא 0, נקרא גם איבר פותח, ונמצא מימין ממש לאיבר הפותח מעליו המטריצה מדורגת.
- צורה מדורגת קנונית - היא מדורגת וגם מעל כל איבר פותח יש 0, וגם כל איבר פותח הוא 1.

### 3 סוגי פתרונות

- פתרון יחיד - כאשר כל האיברים הפותחים שונים מ-0 וגם כמות האיברים הפותחים שווה לכמות המשוואות.
- אין פתרון - כאשר מקבלים שורת סתירה, כלומר כל המשתנים חופשיים והאיבר החופשי שונה מ-0.
- אין סוף פתרונות - כאשר יש לפחות איבר חופשי אחד והשורה היא לא שורת סתירה.

## הגדרת מטריצות

### סימון במטריצה

- $A_{i,j}$ - של המטריצה $A$, $i$ מס' שורה, $j$ מס' עמודה.
- $A_i$ - שורה $i$ במטריצה $A$
- $A^j$ - עמודה $j$ במטריצה $A$
- $A_{n\times m}$ - מטריצה עם $n$ שורות ו-$m$ עמודות

## פעולות על מטריצות

- חיבור - $(A+B)_{i,j} = A_{ij} + B_{ij}$

### תכונות שמתקיימות עבור חיבור

$A,B,C \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ , $e,d \in \mathbb{R}$

- סגירות - $A+B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$
- חילוף - $A+B = B+A$
- קיבוץ - $(A+B)+C = A+(B+C)$
- קיום איבר הנוטרלי - $A+0=A$
- קיום איבר נגדי - לכל $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ קיים ...

- כפל בסקלר - $c \cdot A = c \cdot A_{i,j}$ , $1 \le i \le n, 1 \le j \le m$

## תכונות שמתקיימות עבור כפל בסקלר

$A, B \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$ , $a, b \in \mathbb{R}$

- סגירות - $a \cdot A \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$
- קיבוץ - $(a \cdot b) \cdot A = a \cdot (b \cdot A)$
- חוק היחידה - $1 \cdot A = A$
- פילוג מימין - $(a \cdot b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$
- פילוג משמאל - $a \cdot (A + B) = a \cdot A + b \cdot A$
- ✱ $A \cdot (-1) = (-A)$

- כפל מטריצות - $(A \cdot B)_{i,j} = \sum_{l=1}^{m} A_{i,l} \cdot B_{l,j}$ כאשר $A_{n \times k}, B_{k \times m}$

## תכונות שמתקיימות עבור כפל מטריצות

- חוק פילוג - $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$
- חוק הקיבוץ - $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- חילופיות לא בהכרח קיימת

- שיחלוף מטריצות - $(A^t)_{i,j} = A_{j,i}$

## תכונות שמתקיימות בשיחלוף

- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(a \cdot A)^t = a \cdot A^t$
- $((A)^t)^t = A$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

## תכונות של מטריצות

### מטריצת היחידה

$I_{i,j} = 1$ אם $i = j$ אחרת $I_{i,j} = 0$.

- $I_{n \times n} \cdot A_{n \times k} = A_{n \times k}$
- $I_{n \times n} \cdot A_{n \times n} = A_{n \times n} \cdot I_{n \times n} = A_{n \times n}$

## הצגה מטריציונית של מערכת משוואות

$$A_{n\times m} \cdot \bar{X}_{m\times 1} = \bar{b}_{n\times 1}$$

מטריצת המקדמים — וקטור המשתנים — וקטור האיברים החופשיים

## מטריצה הפוכה

מטריצה $A_{n\times n}$, $B_{n\times n}$ תקרא הפוכה של $A$ אם"ם $A\cdot B=B\cdot A=I$ , $B=A^{-1}$

- יחידות ההופכית - אם $B_1,B_2$ הופכיות של $A$ אז $B_1=B_2$
- $(A^{-1})^{-1}=A$
- אם למטריצת המקדמים יש הפוכה, יש למטריצה פתרון יחיד. $\bar{X}=A^{-1}\cdot\bar{b}$
- אם $A\cdot B$ הפיכה אז גם $B\cdot A$ ומתקיים $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$
- אם $A_1\cdot\ldots\cdot A_n$ הפיכות אז מתקיים $A_n^{-1}\cdot\ldots\cdot A_1^{-1}$

## מטריצות אלמנטריות

פעולת שורה אלמנטרית אחת על $I$ נותנת מטריצה אלמנטרית

### 3 סוגי מטריצות אלמנטריות

- החלפת שורה $R_{ij}$ - $E_{i,j}$
- הכפלת שורה $i$ בסקלר $R_i(a)$ - $E_i(a)$
- הכפלת שורה $j$ ב-$a$ והוספתה לשורה $i$ $R_i^j a$ - $E_i^j a$

- הכפלת מטריצה אלמנטרית במטריצה $A$ מצד שמאל נותנת את פעולת השורה המתאימה על $A$.
- כל המטריצות האלמנטריות הפיכות ומתקיים
  - $(E_{ij})^{-1}=E_{ij}$
  - $(E_i(a))^{-1}=E_i(\frac{1}{a})$
  - $(E_i^j(a))^{-1}=E_i^j(-a)$
- כל מטריצה ריבועית ניתן להכפיל בסידרה של מטריצות אלמנטריות ולקבל או מטריצה עם שורת אפסים או את $I$.
- אם תהליך הדירוג של $A$ הוביל ל-$I$ אז $A$ הפיכה.
- $A^{-1}=(E_1^{-1}\cdot\ldots E_n^{-1})^{-1}=E_n\cdot\ldots\cdot E_1$

## המשך מטריצה הפוכה

- כדי למצוא מטריצה הפוכה ניתן לבצע דירוג על המטריצה A כך עד קבלת I בצד שמאל. מה שנקבל בימין יהיה ה-$A^{-1}$. $(A|I)$
- אם $A_{n\times n}$ שקולת שורות למטריצה עם שורת אפסים אזי A לא הפיכה.
- אם $A,B$ מסדר $n\times n$ ומתקיים $A\cdot B=I$ אז מתקיים $B\cdot A=I$, כלומר $A^{-1}=B$
- אם במערכת משוואות ליניארית מצורה מטריציונית $A\cdot\bar{x}=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^n$ אז $A$ הפיכה. (וההפך).
- מערכת משוואות ליניארית ריבועית שמטריצת המקדמים שלה שקולת שורות ל-$I$ יש לה פתרון יחיד.
- מערכת משוואות ליניארית ריבועית שמטריצת המקדמים שלה שקולת שורות למטריצה עם שורת אפסים:
  - אז אם $a\neq c$ - אין פתרון למערכת
  - אז אם $a=c$ - יש אינסוף פתרונות.

## תכונות על מטריצות

- $A^n = A\cdot A\cdot\ldots\cdot A$ קיבוץ
- $A^0 = I$
- $A^m\cdot A^n = A^{m+n}$
- $(A^m)^n = A^{n\cdot m}$
- $(A\cdot B)^n \neq A^n\cdot B^n$
- $A^{-m} = (A^m)^{-1}$
- $A^{-1} = (A')^{-1}$

## דטרמיננטה

- $|A|_{k\times k} = \sum_{j=1}^{k} A_{i,j}(-1)^{i+j}|M_{i,j}(A)|$
- $|A|$ נותנת את אותה התוצאה כאשר מחשבים פיתוח לפי כל שורה וכל עמודה.
- $|A| = |A^t|$
- אם ב-$A_{k\times k}$ יש שורה/עמודה $j$ שמקיימת $A_i = aA_j$ אז $|A|=0$.
- במטריצה משולשית עליונה אז $|A| =$ מכפלת איברי האלכסון

## מטריצה 3 מודה

- $(A^*)_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot |M_{i,j}(A)|$
- $A \cdot (A^*)^t = |A| \cdot I \Rightarrow \frac{(A^*)^t}{|A|} = A^{-1}$
- נוסחת קרמר לפתרון $Ax=b$ ע"י $A^*$ (אם $|A|\neq 0$)

$X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$ , $\Delta_i = \begin{vmatrix} | & & | & & | \\ A_1 & \cdots & b & \cdots & A_n \\ | & & | & & | \end{vmatrix}$

מקום i שמים את וקטור b

## פעולות אלמנטריות על דטרמיננטה

- הכפלת שורה ב-a, $|A| \Rightarrow a|A|$.
- החלפת שורות, $|A| \Rightarrow -|A|$.
- הכפלת שורה במס' והוספתה לשורה אחרת, $|A| = |A|$.

- לכל $A,B$ ← $|AB| = |A| \cdot |B|$
- $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = |A|^{-1}$

## הגדרות של שדה

שדה הוא קבוצה שמוגדרות לו שתי פעולות פלוס וכפל ומקיימת את ה-11 אקסיומות:

- אקסיומות לחיבור
  - סגירות - לכל $x,y \in F$ מתקיים $x+y \in F$
  - קיבוץ - לכל $x,y,z \in F$ מתקיים $(x+y)+z = x+(y+z)$
  - חילוף - לכל $x,y \in F$ מתקיים $x+y=y+x$
  - קיום איבר 0 - לכל $x \in F$ מתקיים $x+0=x$
  - קיום איבר נגדי - לכל $x \in F$ קיים $y \in F$ המקיים $x+y=0$
- אקסיומות לכפל
  - סגירות - לכל $x,y \in F$ מתקיים $x \cdot y \in F$
  - קיבוץ - לכל $x,y,z \in F$ מתקיים $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
  - חילוף - לכל $x,y \in F$ מתקיים $xy = yx$
  - קיום איבר נייטרלי 1 - קיים $1 \in F$ המקיים שלכל $x \in F$ מתקיים $1 \cdot x = x$
  - קיום איבר הופכי - לכל $x \in F / \{0\}$ קיים $x' \in F$ המקיים $x \cdot x' = 1$
- אקסיומה משותפת
  - פילוג - לכל $x,y,z \in F$ מתקיים $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

- איבר ה-0 הוא יחיד.
- הניטרלי לכפל הוא יחיד
- לכל $x$ הנגדי הוא יחיד, $-(-x) = x$
- לכל $x \in F \setminus \{0\}$ ההופכי הוא יחיד, $(x^{-1})^{-1} = x$
- לכל $a, b \in F$ מתקיים $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$
- לכל $x \in F$ $x \cdot 0 = 0$

<u>מרוכבים</u>

$i^2 = -1$, ( $\sqrt{-1} = i$ ). כאשר איבר בשדה המרוכבים $z$ הוא $z = a + bi \in \mathbb{C}$

- איבר ה-0: $0 + 0i$
- נגדי: אז $z = a + bi$ $-z = -a - bi$
- הופכי: ( $x, y$ לא שניהם 0)